ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Утверждены
на заседании Центральной предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по математике
(протокол № 2 от 03.06.2014 г.)

Методические рекомендации по проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 учебном году

Москва

2014

СОДЕРЖАНИЕ

Методические рекомендации по проведению школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 учебном году

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам. Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июня 2014).

Школьный этап Олимпиады. Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 3-4 урока.

Согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Участники школьного этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов в своей параллели, признаются победителями школьного этапа Олимпиады. Количество призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Призерами школьного этапа Олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призеров признаются все участники школьного этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

Характер заданий

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.

3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательную, запоминающуюся форму. Формулировки задач должны быть четкими и понятными для участников.

5. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

6. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

7. В задания для учащихся 5-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Проверка и оценивание олимпиадных работ

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Подготовка типовых заданий школьного этапа олимпиады

Приведенные типовые задания школьного этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех муниципальных образований, в силу заметной разницы в уровне развития в различных городах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Муниципальным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать территориальную специфику. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий школьного этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику. Важно отметить, что не следует в буквальной степени повторять предлагаемую в данных Требованиях тематику в силу того, что в распоряжении составителей олимпиады могут оказаться задачи другой тематики, более точно вписывающиеся в разрабатываемый вариант по сложности, либо, напротив, нахождение задания указанной тематики представляет определенную сложность.

Приведем общую тематику олимпиадных заданий для разных классов.

Тематика олимпиадных заданий

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости. Функция. Область определения и область значения функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 — 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Типовые задания школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников

Пятый класс

5.1. На уроке физкультуры мальчики построились в шеренгу. Потом между каждыми двумя мальчиками встала девочка. Всего в шеренге оказалось 25 детей. Сколько мальчиков стояло в шеренге?

Ответ. 13.

Решение. Уберем самого правого мальчика. Тогда мальчиков и девочек будет поровну, то есть по 12. Значит, в шеренге стояло 12 + 1 = 13 мальчиков.

5.2. Замените буквы A, B, C, D цифрами так, чтобы получилось верное равенство AAAA + BBB + CC + D = 2014.

Ответ. 1111 + 888 + 11 + 4 = 2014.

5.3. Составьте из шести прямоугольников 7x1, 6x1, 5x1, 4x1, 3x1, 2x1 и квадрата 1x1 прямоугольник, у которого каждая сторона больше 1.

Решение. Из прямоугольника 6x1 и квадрат 1x1 сложим прямоугольник 7x1. Аналогично сложим прямоугольники 7x1 из пар прямоугольников 5x1, 2x1 и 4x1, 3x1. Из четырех полученных прямоугольников 7x1 складывается прямоугольник 7x4.

5.4. В 9.00 Юра вышел из дома и пошёл по прямой дороге со скоростью 6 км/ч. Через некоторое время он развернулся и с той же скоростью пошёл домой. В 12.00 Юре оставалось до дома два километра. На каком расстоянии от дома он развернулся? Объясните, как был найден ответ.

Ответ. На расстоянии 10 км.

Решение. За 3 часа, с 9.00 до 12.00, Юра прошёл 18 км. Если он пройдет еще два километра, то он попадет домой. То есть 18 + 2 = 20 км. – это путь до места разворота и обратно. Значит, он развернулся на расстоянии 20:2 = 10 км от дома.

5.5. Кот Матроскин прикинул, что он может выложить пол квадратной комнаты квадратной плиткой, и ему не понадобится ни одну из них разрезать. Сначала он положил плитки по краям комнаты, и на это у него ушло 84 плитки. Сколько всего ему надо иметь плиток, чтобы покрыть весь пол?

Ответ. 484.

Решение. На каёмке, не считая угловых, лежит 84 – 4 = 80 плиток. Значит, на каждой стороне лежит 20 плиток, не считая угловых, а вместе с угловыми – 22 плитки. Поэтому общее число плиток равно 484.

Шестой класс

6.1. Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

Ответ. Например: 9 + 6; 8 + 5 + 2; 7 + 4 + 3 + 1.

Решение. Суммарный вес гирек равен 45, поэтому в каждой коробочке суммарный вес гирек равняется 15 г.

6.2. Мальчик по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда врёт. Как-то его три ноябрьских дня подряд спрашивали: «Как тебя зовут?». На первый день он ответил: «Андрей», на второй: «Борис», на третий: «Виктор». Как зовут мальчика? Объясните, как вы рассуждали.

Ответ. Борис.

Решение. Так как мальчик дал три разных ответа, он хотя бы два раза соврал. Поэтому два дня из трёх, когда мальчику задавали вопросы, пришлись на нечётные числа. Поскольку чётные и нечётные числа месяца чередуются, это должны были быть первый и третий дни. Стало быть, второй день пришёлся на чётное число. В этот день мальчик и назвал своё настоящее имя.

6.3. Мышь, мышонок и сыр вместе весят 180г. Мышь весит на 100г больше, чем мышонок и сыр вместе взятые. Сыр весит в три раза меньше, чем мышонок. Сколько весит каждый из них? Ответ нужно подтвердить вычислениями.

Ответ. Мышь – 140г, сыр – 10г, мышонок – 30г.

Решение. Из условия следует, что удвоенный вес мыши равен 180 + 100 = 280г. Поэтому вес мыши равен 140г. Тогда мышонок и сыр вместе весят 180 – 140 = 40г. А вес сыра, согласно условию, равен четверти этого веса.

6.4. Как разрезать квадрат на семь треугольников, среди которых есть шесть одинаковых?

Решение. Два способа сделать это показаны на рис. 1. Есть и другие способы.

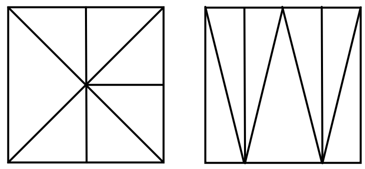

Рис. 1

6.5. Есть 24 палочки. Длина первой палочки – 1 см, второй – 2 см, …, двадцать четвёртой – 24 см (длина каждой следующей палочки на 1 см больше длины предыдущей). Как, использовав все эти палочки, составить три различных квадрата? Ломать палочки нельзя, каждая палочка должна входить только в один квадрат.

Решение. Разобьем палочки на три группы: от 1 до 8, от 9 до 16, от 17 до 24. В каждой группе первую палочку соединим с последней, вторую – с предпоследней, третью – с третьей с конца, оставшиеся две палочки тоже соединим. Получим в каждой группе по четыре одинаковых палки, из которых сложим квадрат. Стороны полученных квадратов: 9, 25, 41.

Замечание. Есть и другие способы сложить три квадрата.

Седьмой класс

7.1. К Васе пришли его одноклассники. Мама Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

Ответ. 6.

Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

7.2. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири:
12 = 6 + 6. Получили искомое количество гвоздей: 19 = 13 + 6.

7.3. У Пети есть четыре орешка. Он всеми возможными способами брал по три орешка и взвешивал их на весах. Получилось 9 г, 14 г, 16 г и 18 г. Сколько весил каждый орешек? Требуется найти все решения задачи и доказать, что других нет.

Ответ. 1, 3, 5, 10.

Решение. В сумме 9 + 14 + 16 + 18 = 57 вес каждого орешка сосчитан трижды, значит, суммарный вес всех орешков равен 19 г. Разность 19 – 9 = 10 – это вес одного из орешков. Аналогично находим веса остальных орешков.

7.4. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (чёрного) и четырех равных белых прямоугольников (см. рис. 2). Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Найдите площадь чёрного квадрата.

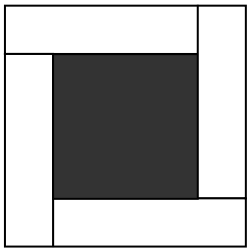

Рис. 2

Ответ. 400.

Решение. Сумма длин короткой и длинной сторон прямоугольника равна 20. Но эта сумма равна стороне исходного квадрата.

7.5. Можно ли выложить в ряд 30 шариков – белых, синих и красных – так, чтобы среди любых двух идущих подряд шариков был хотя бы один белый, среди любых трёх идущих подряд – хотя бы один синий, а среди любых пяти идущих подряд – хотя бы один красный? Ответ объясните.

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Допустим, можно. Возьмём красный шарик, не лежащий с краю (такой найдётся хотя бы в пятёрке шариков со 2-го по 6-ой). Соседние с ним шарики должны быть белыми, иначе найдутся два соседних шарика, среди которых нет белых. Но это значит, что мы нашли три подряд идущих шарика, среди которых нет синего.

Второе решение. Разбив 30 шариков на 15 пар соседних шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 15 белых. Разбив их на 10 троек подряд идущих шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 10 синих. Наконец, разбив их же на 6 пятёрок подряд идущих шариков, видим, что среди выложенных шариков не меньше 6 красных. Получается, что шариков должно быть не меньше, чем 15 + 10 + 6 = 31, а их только 30.

Восьмой класс

8.1. У Васи в кошельке лежало немного денег. Вася положил в кошелек еще 49 рублей, и сумма денег в кошельке увеличилась в 99 раз. Сколь денег стало у Васи в кошельке?

Ответ. 49 рублей 50 копеек.

Решение. Пусть вначале у Васи было x рублей. Из условия задачи получаем, что $x + 49 = 99x$. Решая это уравнение, получаем $x = 0{,}5$ рубля = 50 копеек.

8.2. Имеется 30 бревен длинами 3 и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаны длиной 1 м? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.)

Ответ. 70.

Первое решение. Склеим все бревна в одно 100-метровое бревно.

Чтобы его разделить на 100 частей, нужно сделать 99 распилов, из которых 29 уже было сделано.

Второе решение. Если было m трехметровых и n четырехметровых бревен, то $m + n = 30$, $3m + 4n = 100$, откуда $m = 20$, $n = 10$. Поэтому нужно сделать $20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 70$ распилов.

8.3. Число a таково, что прямые $y = ax + 1$, $y = x + a$ и $y = 3$ различны и пересекаются в одной точке. Каким может быть a?

Ответ. $a = 2$.

Первое решение. Заметим, что при $x = 1$ выполняется $ax + 1 = x + a = a + 1$, так что точка M $(1;\ a + 1)$ является общей для прямых $y = ax + 1$ и $y = x + a$. Так как прямые различны, M – их единственная общая точка. Поэтому прямая $y = 3$ тоже должна проходить через неё, откуда $a + 1 = 3$ и $a = 2$. Легко видеть, что при $a = 2$ все три прямые действительно различны.

Второе решение. По условию в точке пересечения $a\,x + 1 = x + a \Leftrightarrow (a - 1)(\,x - 1) = 0$, откуда $a = 1$ или $x = 1$. Но случай $a = 1$ невозможен, потому что тогда первые две прямые совпадали бы. Дальше рассуждаем как в первом решении.

8.4. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC = 120°$, $\angle DAB = 60°$.

Ответ. 90°, 60°, 30°.

Решение. $\angle ADB = 180° - \angle ADC = 60°$. Тогда $\angle ABD = 60°$. Значит, треугольник ABD – равносторонний. Откуда $AD = BD = DC$. То есть треугольник ADC – равнобедренный. Значит, $\angle DAC = \angle DCA = 30°$. Следовательно, $\angle BAC = 90°$.

8.5. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?

Ответ. 1003.

Решение. Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т. е. среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей, т. е. всего в шеренге не более 1002 + 1 = 1003 рыцарей.

Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

Девятый класс

9.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 2013.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть $y - x - 1 = 2011$ или $y - x = 2012$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2012 - 1 = xy - 2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

9.2. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продает купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него была 1000 рублей?

Решение. Один из вариантов следующий. Первые четыре дня Вася должен покупать товар на все имеющиеся у него деньги. Тогда через четыре дня у него будет 16 000 рублей ($1000 \to 2000 \to 4000 \to 8000 \to 16\ 000$). На пятый день он должен купить товар на 9 000 рублей. У него останется 7 000 рублей. После обеда он продаст товар за 18 000 рублей, и у него станет ровно 25 000 рублей.

9.3. Даны ненулевые числа x, y и z. Чему может равняться значение выражения $\left(\frac{x}{|y|}-\frac{|x|}{y}\right)\cdot\left(\frac{y}{|z|}-\frac{|y|}{z}\right)\cdot\left(\frac{z}{|x|}-\frac{|z|}{x}\right)$?

Ответ. 0.

Решение. Докажем, что выражение, стоящее по крайней мере в одной из скобок, равно нулю. Выражение, стоящее в первой скобке, принимает нулевое значение, если x и y одного знака. Аналогично для второй и третьей скобок. Но среди ненулевых чисел x, y и z обязательно найдутся либо два положительных числа, либо два отрицательных. А значит, хотя бы один из трех множителей равен нулю. Поэтому все произведение равно нулю.

9.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Вася.

Решение. После каждого забега разность количества конфет, полученных любыми двумя из присутствовавших на уроке школьников, делится на 3 (эта разность равна 0 или 3). Значит, и в конце четверти разность количеств конфет, полученных любыми двумя из посетивших все уроки физкультуры школьников, делится на 3. А из данных чисел 29, 32, 37 разность, делящуюся на 3, дают только числа 29 и 32. Значит, пропустил урок тот школьник, который заработал 37 конфет.

9.5. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60°, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Решение. Пусть AD и CE – высоты треугольника ABC, O – точка их пересечения (см. рис. 3). Из того, что в прямоугольном треугольнике AOE угол AOE равен 60°, следует, что $OE = AO/2$, т. е. $OE = OD$. Значит, прямоугольные треугольники OEB и ODB равны (BO – общая гипотенуза). Тогда $BE = BD$, откуда следует, что $\Delta ABD = \Delta CBE$ ($\angle ABC$ – общий). Отсюда $AB = BC$. С другой стороны, $\angle ABC = 90° - \angle BAD = \angle AOE = 60°$. Значит, треугольник ABC равносторонний.

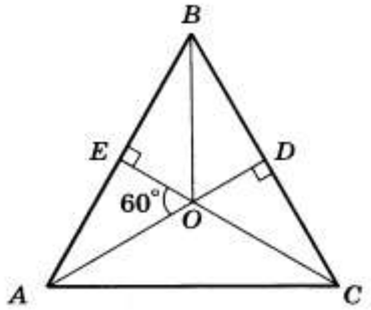

Рис. 3

Десятый класс

10.1. Садовод-исследователь в течение июля и августа наблюдал за своей яблоней. За каждый месяц каждое яблоко увеличивает вес в 1,5 раза, но при этом 20% хороших яблок становятся червивыми. Как и на сколько процентов изменился общий вес хороших яблок в конце августа по сравнению с началом июля, если в начале июля ни одного червивого яблока не было?

Ответ. Вырос на 44%.

Решение. Пусть общий вес яблок на начало июля составляет a. Тогда, если бы яблоки не портились, их вес на конец августа составил бы $2{,}25a$. Но поскольку за месяц портились 20% из них, общий вес хороших яблок составляет $2{,}25a \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 1{,}44\ a$. Это означает, что общий вес хороших яблок вырос на 44%.

10.2. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечётные, а второе – чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

10.3. Найдите произведение

$(\sin 0° - \cos 0°)(\sin 1° - \cos 1°)\ldots(\sin 89° - \cos 89°)(\sin 90° - \cos 90°)$.

Ответ. 0.

Решение. Среди сомножителей есть разность $\sin 45° - \cos 45°$, равная 0, поэтому произведение равно 0.

10.4. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $DE \parallel AC$. Оказалось, что биссектрисы углов AED и EDC пересекаются в точке F, лежащей на стороне AC. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, является центром окружности, описанной около треугольника EDF.

Решение. Из параллельности следует, что $\angle AFE = \angle FED = \angle AEF$ (см. рис. 4). Значит, треугольник AEF – равнобедренный: $AE = AF$. Значит, биссектриса угла EAF является медианой и высотой треугольника AEF, то есть серединным перпендикуляром к стороне EF. Аналогично, биссектриса угла DCF является серединным перпендикуляром к стороне DF.

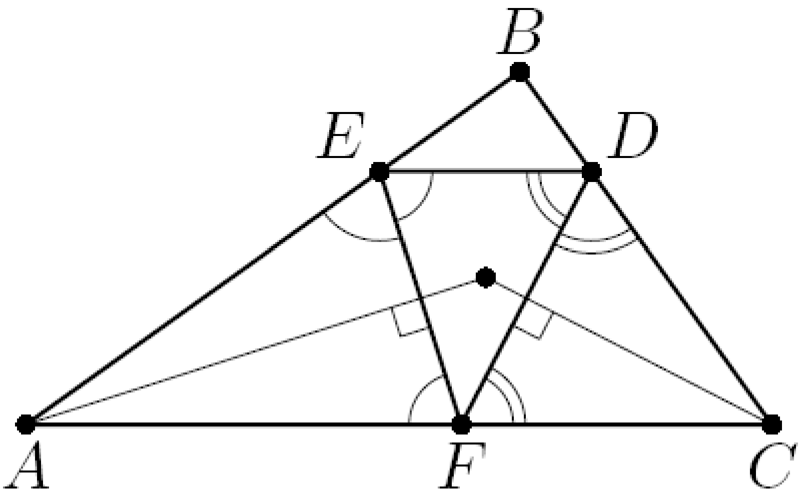

Рис. 4

Центр окружности, вписанной в треугольник ABC – это точка пересечения упомянутых биссектрис, а центр окружности, описанной около EDF – это точка пересечения упомянутых серединных перпендикуляров. Значит, эти точки совпадают.

10.5. Числа a, b подобраны так, что $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}=\dfrac{1}{3}$. Найдите $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}$.

Ответ. –3.

Первое решение. **З**аметим, что произведение этих чисел равно –1. Действительно, $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}\cdot\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}=\dfrac{a^2-(a^2+4b^2)}{(2b)^2}=\dfrac{-4b^2}{4b^2}=-1$. Но тогда второе число равно –3.

Второе решение. Исходное равенство эквивалентно равенству $3a-2b=\sqrt{a^2+4b^2}$. Возводя в квадрат и делая преобразования, получаем, $b=-\dfrac{3a}{8}$. При этом условие $3a-2b\geq 0$ означает, что $a>0$, $b<0$. Тогда $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}=\dfrac{a+\frac{5a}{4}}{-\frac{3a}{4}}=-3$.

Одиннадцатый класс

11.1. Числа x, y, z и t таковы, что $x>y^3$, $y>z^3$, $z>t^3$, $t>x^3$. Докажите, что $xyzt>0$.

Решение. Пусть $x<0$, тогда из первого неравенства следует, что $y^3<0$, то есть $y<0$. Далее аналогично $z<0$ и $t<0$. Значит, все четыре числа отрицательны, и их произведение положительно.

Если $x>0$, то из последнего неравенства $t>0$, и далее аналогично $z>0$ и $y>0$, откуда $xyzt>0$.

Если же $x=0$, то тогда из первого неравенства следует, что $y^3<0$, то есть $y<0$. Далее аналогично $z<0$ и $t<0$. После этого из последнего неравенства следует, что $x<0$; противоречие. Итак, случай $x=0$ невозможен.

11.2. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $K(1;2)$ расположена ниже графика параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определите, как эта точка расположена по отношению к графику параболы $y = cx^2 + bx + a$.

Ответ. Ниже графика параболы.

Решение. Заметим, что при $x = 1$ обе параболы проходят через точку A с координатами $(1; a+b+c)$. Раз точка K лежит ниже графика первой параболы, и ветви первой параболы направлены вверх, то она лежит ниже точки A (то есть $2 < a+b+c$). Но так как ветви второй параболы также направлены вверх и точка K лежит ниже точки A параболы, то K лежит и ниже графика второй параболы.

11.3. Найдите произведение $(\mathrm{tg}^2 1° - 3)(\mathrm{tg}^2 2° - 3)\ldots(\mathrm{tg}^2 88° - 3)(\mathrm{tg}^2 89° - 3)$.

Ответ. 0.

Решение. Среди сомножителей есть разность $\mathrm{tg}^2 60° - 3$, равная 0, поэтому произведение равно 0.

11.4. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?

Ответ. Не может.

Первое решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел является чётным числом, так как содержит ровно 50 нечётных слагаемых. А сумма 98 последовательных натуральных чисел является нечётным числом, так как содержит ровно 49 нечетных слагаемых. Поэтому эти суммы оканчиваются на цифры разной чётности.

Второе решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчивается на 0, а сумма никаких двух подряд идущих чисел на 0 не оканчивается. Значит, не заканчивается на 0 и сумма никаких 98 подряд идущих чисел.

11.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На продолжении диагонали BD за точку D выбрана точка F такая, что $AF \parallel BC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ADF, касается прямой AC.

Решение. Условие касания равносильно тому, что угол CAD между прямой CA и хордой AD равен половине градусной меры дуги AD, то есть вписанному углу AFD, опирающемуся на эту дугу (см. рис. 5).

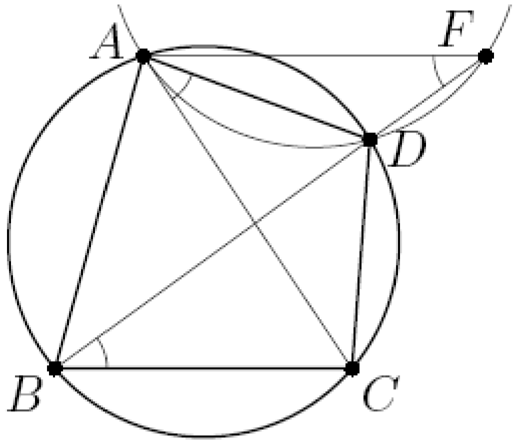

Рис. 5

Но из параллельности прямых BC и AF следует, что $\angle AFD = \angle DBC = \angle CAD$ (последнее равенство вытекает из того, что вписанные углы DBC и CAD опираются на одну дугу CD), что и требовалось.

Методические рекомендации по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 учебном году

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июня 2014).

Муниципальный этап Олимпиады. Основные задачи.

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ ее результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одаренными школьниками в регионе. При этом усиливается стимулирующая роль Олимпиады, когда у ее участника появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьезным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания еще в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одаренными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллелей 5 и 6 классов, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

По возможности муниципальный этап Олимпиады должен проводиться без установления квот представительства от школ: это означает, что участниками олимпиады могут быть **все** победители и призеры школьного этапа Олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Следует еще раз подчеркнуть недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения. Олимпиада является **индивидуальным соревнованием** одаренных детей, а не соревнованием школ, и в ней имеют право принимать участие **все** наиболее способные учащиеся.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 5 и 6 классов – 3 часа; для учащихся 7-11 классов – 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Рекомендуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например 9-01, 9-02, …) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, окончивших школу в данном муниципальном образовании и успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Жюри олимпиады не вправе «защищать честь мундира» и отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется ее повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Участники муниципального этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов в своей параллели, признаются победителями. Количество призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором регионального этапа Олимпиады. Призерами муниципального этапа Олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призеров признаются все участники муниципального этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

Характер заданий

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Они должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Наиболее удачным является комплект заданий, при котором с первым заданием успешно справляются около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательную, запоминающуюся форму. Формулировки задач должны быть четкими и понятными для участников.
5. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.
6. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Проверка олимпиадных работ

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы:

«Квант», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г.. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 — 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Типовые задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

Шестой класс

6.1. Приведите какое-нибудь одно решение числового ребуса

ДО+РЕ+МИ+ФА =128

(различными буквами зашифрованы различные ненулевые цифры).

Ответ. $15+26+38+49=128$.

Замечание. Ответ является единственным с точностью до перестановок у слагаемых цифр в разрядах единиц или цифр в разрядах десятков.

6.2. Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме оставалось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу?

6.2. Ответ. 30 м.

Решение. Когда Петя добежит до финиша, Коля и Вася в сумме пробегут $2\cdot 85=170$ м из $100+100=200$ м, которые они вместе должны пробежать. Значит, им останется пробежать $200-170=30$ м.

6.3. Квадрат разрезан на прямоугольники так, как показано на рис. 6. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите во сколько раз длинная сторона самого высокого прямоугольника больше его короткой стороны.

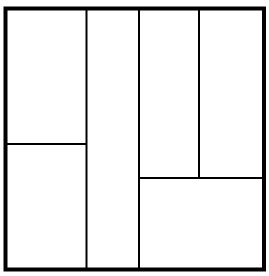

Рис. 6

6.3. Ответ. В 6 раз.

Решение. Площадь всех прямоугольников A, B, C, D, E, F равны. Поэтому площадь прямоугольника C составляет шестую часть от площади квадрата (см. рис. 7). Его вертикальная сторона равна стороне квадрата, поэтому горизонтальная сторона должна быть в 6 раз меньше стороны квадрата. Поэтому его стороны относятся как $6:1$.

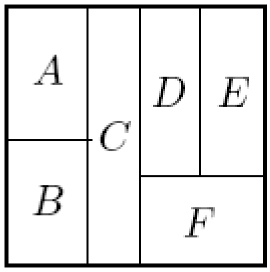

Рис. 7

6.4. Трое учеников написали одинаковый тест. За правильно решённую задачу ученику ставилось 2 балла, за неправильно решённую – снимался 1 балл, а если ответ на задачу не записан, то ставилось 0 баллов. Вместе ученики набрали 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

Решение. Предположим, что все три ученика писали ответы ко всем задачам. Тогда, если какую-то задачу они все трое решили правильно, то они получат за неё вместе $2\cdot 3=6$ баллов. Если какую-то задачу двое из них решили правильно, а один нет, то они получат за неё вместе $2+2-1=3$ балла. Если какую-то задачу один решил правильно, а двое нет, то они получат за неё вместе $2-1-1=0$ баллов. Наконец, если какую-то задачу они все трое решили неправильно, то с них суммарно снимут $1\cdot 3=3$ балла.

Изначально у них было суммарно 0 баллов. После решения каждой задачи сумма баллов либо не изменялась, либо изменялась на число, делящееся на 3. Поэтому, если бы все ученики писали ответы ко всем задачам, то в конце общая сумма баллов у них делилась бы на 3. Но 100 на 3 не делится. Поэтому кто-то из учеников при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

6.5. В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть – рыцари (они всегда говорят правду), а остальные – лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 яблока»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше 3, 4, …, 10 яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?

Ответ. 5.

Решение. Так как 10 человек взяли по яблоку из мешка, то в мешке изначально было не меньше 10 яблок. После того, как первые 4 человека взяли по яблоку из мешка, в мешке осталось не менее 6 яблок. Значит, пятый вошедший (сказавший, что в мешке больше 5 яблок) сказал правду. Аналогично, сказали правду первые четверо. Это означает, что рыцарей не меньше 5, а лжецов не больше $10-5=5$.

С другой стороны, 5 лжецов среди этих 10 человек быть могло, если, например, в мешке изначально лежало 10 (или 11) яблок. Тогда первые пять человек скажут правду, а все, начиная с шестого (перед его приходом в мешке будет только 5 или 6 яблок), солгут.

Седьмой класс

7.1. На двух карточках написано одно и то же семизначное число N, оканчивающееся на 9876. Одну карточку разрезали на две, проведя разрез между третьей и четвёртой цифрами, а другую – проведя разрез между четвёртой и пятой цифрами. Приведите пример какого-нибудь числа N такого, чтобы сумма чисел на половинках первой карточки была равна сумме чисел на половинках второй карточки.

Ответ. Единственный вариант – это число 9999876.

Решение. Ответом является решение ребуса $ABC+9876=ABC9+876$ (разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Вычитая из обеих частей по 876, получаем $ABC+9000=ABC0+9$. Отсюда $9\cdot ABC=9000-9$, то есть $ABC=1000-1=999$. В этом случае получаем $9999+876=999+9876=10875$.

7.2. Маша каждый день берёт в школу и съедает на переменах либо 6 слив, либо 2 яблока и банан. В пятницу, когда она съела на перемене часть принесённых фруктов (но не все), оказалось, что с начала недели она уже съела на переменах 21 фрукт. Сколько и каких фруктов осталось у неё в портфеле? Объясните свой ответ.

Ответ. Три сливы.

Решение. Общее количество фруктов, съедаемых Машей на переменах за один день, делится на 3. Поскольку она съела 21 фрукт – число, делящееся на 3, то либо у нее не осталось в портфеле фруктов (что противоречит условию), либо осталось три фрукта. Ими могли быть только сливы, так как в противном случае в портфеле оставались бы 2 яблока и банан, то есть в этот день она бы ещё не ела фруктов.

7.3. В зале 2013 человек; каждый из них – либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждого из них спросили: «Кого в зале больше: лжецов или рыцарей?». Каких ответов – «Лжецов» или «Рыцарей» – было больше и почему?

Ответ. «Рыцарей».

Решение. Общее количество человек в зале нечётно, поэтому либо рыцарей, либо лжецов в зале большинство.

Пусть в зале больше рыцарей. Тогда каждый из них дал ответ «Рыцарей», и с учётом того, что их больше, получается, что больше будет ответов «Рыцарей». Если же в зале больше лжецов, то теперь уже они будут говорить, что рыцарей больше, и, значит, вновь будет больше ответов «Рыцарей».

7.4. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

Ответ. Неверно.

Решение. На рис. 8 приведены три возможных способа укладки уголков, при которых после убирания любого из уголков положить прямоугольник из трёх клеток не получится.

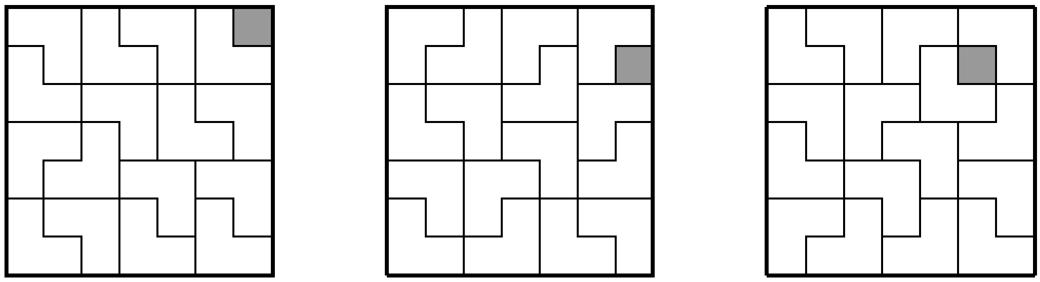

Рис. 8

Замечание. Существуют и другие способы.

7.5. Загаданы четыре различных натуральных числа. Математик знает про это. Вначале ему назвали сумму двух самых маленьких чисел, и он не смог угадать эти два числа. Но, когда ему сказали, что сумма всех четырёх чисел равна 15, он сумел назвать все четыре числа. Чему равны эти числа? Объясните, как рассуждал математик.

Ответ. 2, 3, 4, 6.

Решение. Вначале математику не могли назвать сумму, меньшую, чем 5, так как при названных суммах 3 или 4 он бы сразу сказал, что это суммы $1+2$ или $1+3$. Третье из загаданных чисел по крайней мере на 2 больше, чем первое (между ними ещё есть второе число). Аналогично, четвёртое по крайней мере на 2 больше второго. Значит, если бы вначале математику назвали сумму, не меньшую 6, то сумма третьего и четвёртого чисел была бы не меньше, чем $6+2+2=10$, а сумма всех чисел – не меньше, чем $6+10=16$, что не так.

Итак, сумма первых двух чисел равна 5, а сумма третьего и четвёртого равна $15-5=10$. Эта сумма не могла быть набрана как $1+9$ или $2+8$ (так как третье число не меньше 3). Также эта сумма не могла быть набрана как $3+7$, так как если бы третье число было равно 3, то сумма первых двух равнялась бы $1+2=3$. Значит, третье и четвёртое числа – это 4 и 6. Тогда для первого и второго остаётся единственный вариант с суммой 5, а именно 2 и 3.

Восьмой класс

8.1. За круглым столом сидят несколько человек – каждый из них либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). У каждого из них спросили: «Кто твой сосед справа – рыцарь или лжец?». При этом было получено ровно 20 ответов «Лжец». Докажите, что на вопрос: «Кто твой сосед слева – рыцарь или лжец?» также было бы получено ровно 20 ответов «Лжец».

Решение. Ответ «Лжец» появляется ровно тогда, когда справа от лжеца сидит рыцарь, либо когда справа от рыцаря сидит лжец. То есть таких ответов столько же, сколько пар соседей Рыцарь-Лжец. При изменении вопросов на вопросы о соседях слева ответы «Лжец» будут появляться в этих же парах. Значит, их тоже будет 20.

8.2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

Ответ. 80 м.

Решение. Когда Петя закончил бег, ребята вместе пробежали $4 \cdot 100 - 40 = 360$ м. А за 12 секунд они вместе пробежали 288 м. То есть за 12 секунд Петя пробежал $\frac{288}{360}$ от 100 метров, то есть $\frac{288}{360} \cdot 100 = 80$ м.

8.3. Докажите, что можно выбрать три натуральных числа a, b, c, больших 2013 и таких, что $a^2 + b^2 = 2(c^2 + 1)$.

Решение. Рассмотрим сумму $(n-1)^2 + (n+1)^2 = 2(n^2 + 1)$. При любом натуральном $n > 2014$ она дает искомую тройку $a = n-1$, $b = n+1$, $c = n$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

8.4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса угла DAC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что биссектриса угла BAD перпендикулярна прямой EF.

Решение. Из параллельности прямых DE и AB следует, что $\angle AED = \angle EAB$ (см. рис. 9). Но по условию AE – биссектриса угла BAC, значит, $\angle AEC = \angle CAE$. Отсюда следует, что $CE = CA$. Аналогично, $CF = CA$. Но тогда в равнобедренном треугольнике ECF биссектриса угла при вершине C является высотой, то есть биссектриса угла ECF перпендикулярна прямой EF. Осталось заметить, что биссектрисы равных углов ECF и BAD параллельны, так как они образуют равные углы с параллельными сонаправленными лучами CF и AD.

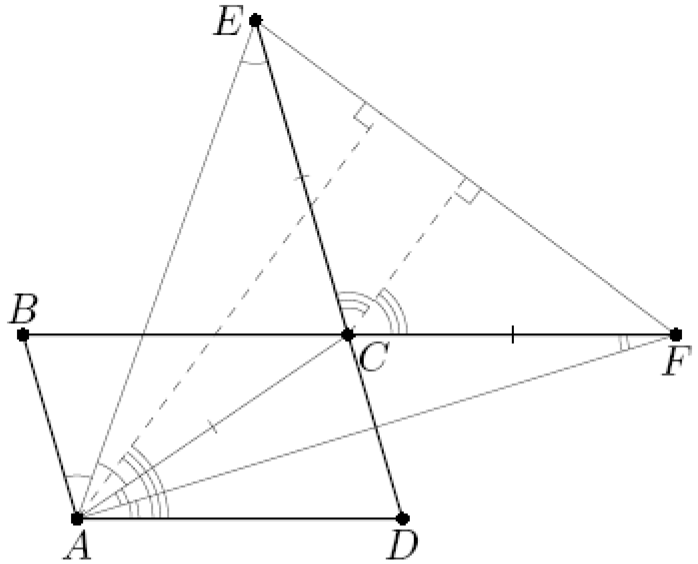

Рис. 9

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

Ответ. Чисел с суммой цифр 48 больше.

Решение. Обозначим первую группу чисел (с суммой цифр, равной 15), через M, а вторую группу (с суммой цифр, равной 48) – через N. Заметим, что $15+48=63=9\cdot 7$. Последнее равенство означает, что каждому числу A из M, не имеющему в записи цифр 0 и 9, соответствует число B из N, полученное заменой в A каждой цифры a на цифру $9-a$. При этом разным числам из M соответствуют разные числа из N, и полученные числа B также не имеют в записи цифр 0 и 9. Итак, оба множества содержат одинаковое количество чисел без нулей и девяток.

Осталось сравнить количества чисел в данных множествах, содержащих в своих десятичных записях цифру 9. Число с суммой цифр 15 может содержать только одну девятку, а остальные цифры должны быть равны 1, так как $9+1\cdot 6=15$. Количество таких чисел равно 7 – по количеству позиций, на которой стоит девятка. В то же время количество чисел в N, содержащих в своей записи хотя бы одну цифру 9, значительно больше. Даже у чисел с одной девяткой в записи сумма остальных шести цифр равна 39 и может быть набрана тремя шестёрками и тремя семёрками более, чем семью способами.

Девятый класс

9.1. Числа от 1 до 20 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих 10 сумм может делиться на 11?

Ответ. 9.

Решение. Если бы все 10 пар чисел давали суммы, делящиеся на 11, то и сумма всех этих сумм, то есть сумма всех 20 чисел, делилась бы на 11. Однако число $1+2+3+\ldots+20=210$ не делится на 11. Значит, таких пар не больше 9.

С другой стороны, пример $2+20=3+19=4+18=\ldots=10+12=22$ показывает, как получить 9 искомых пар (последняя сумма $1+11$ равна 12 – числу, не делящемуся на 11).

Замечание. Существуют и другие разбиения, в которых суммы в девяти парах делятся на 11.

Замечание. Так как среди чисел от 1 до 20 только 11 делится на 11, то сумма чисел в паре с 11 на 11 делиться не будет. Отсюда сразу следует, что требуемых пар не больше 9.

9.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если прибавить к коэффициенту a любой из этих корней, а из коэффициента b вычесть квадрат этого же корня, то полученное уравнение также будет иметь корень.

Решение. Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 – корни данного уравнения, то $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1t_2$. Пусть t_1 – указанный в условии корень. Тогда новое уравнение имеет вид $x^2 - t_2x + (t_1t_2 - t_1^2) = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = t_2^2 - 4t_1t_2 + 4t_1^2 = (2t_1 - t_2)^2 \geq 0$. Значит, уравнение имеет корень.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что корнем полученного уравнения является число t_1 (другой его корень – это $t_2 - t_1$).

9.3. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске?

Ответ. Три.

Решение. Пусть $a \leq b \leq c \leq d$ – данные числа. Из условия следует, что $b + c + d < a$. Но $a \leq b$, значит, $b + c + d < a \leq b$, откуда следует, что $c + d \leq 0$. Значит, по крайней мере одно из двух самых больших чисел, написанных на доске, отрицательно. Следовательно, отрицательных чисел не меньше трёх.

Пример чисел –5, –4, –3, 1 показывает, что одно из чисел может быть положительным.

9.4. На основании AD равнобокой трапеции $ABCD$ выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают вторично окружность, описанную около трапеции $ABCD$, в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника KMN, касается прямой AD.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что угол между лучом KA и хордой KN измеряется половиной заключенной между ними дуги KN окружности, описанной около треугольника KMN, то есть равняется вписанному углу KMN (см. рис. 10). Но этот угол есть угол BMN, равный углу BCN, поскольку они вписаны в окружность, описанную около трапеции, и опираются на одну её дугу BN. Наконец, равенство $\angle AKN = \angle BCN$ сразу следует из параллельности сторон трапеции.

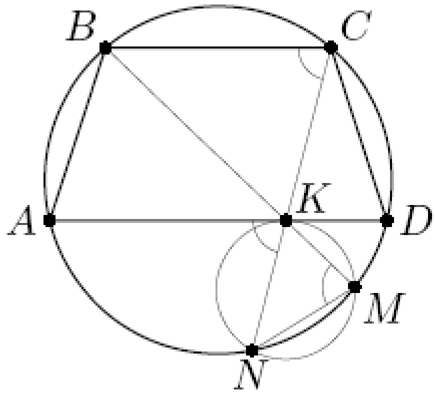

Рис. 10

9.5. Имеется таблица 11×11, из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй – один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A – количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B – количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец – одним столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй.

Решение. Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце, кроме средних, по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.

Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Каждым своим ходом ему следует ставить нолик в клетку, симметричную клетке, в которую только что поставил крестик первый игрок, относительно центра доски (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет равно количеству столбцов, в которых больше ноликов.

Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. Центральная клетка (центр таблицы) вырезана. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Эта строка не даёт преимущества первому игроку. Аналогично, средний столбец не даёт преимущества второму игроку.

Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов.

Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = B = 5$, и второй выиграет.

Десятый класс

10.1. Вася, Петя и Миша стартовали одновременно в забеге на 1 км. Когда Вася финишировал, Петя отставал от него на 100 м, а Миша отставал от Пети на 90 м. Петя закончил бег на 18 секунд позже Васи. На сколько секунд позже Пети прибежал Миша? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

Ответ. На 20 секунд.

Решение. Когда Вася финишировал, Петя пробежал 900 м, а Миша 810 м, то есть скорость Пети в $\frac{10}{9}$ раз больше скорости Миши. Это означает, что когда Петя закончит бег (то есть пробежит 1000 м), Миша пробежит 900 м. То есть за 18 секунд Миша пробежит $900 - 810 = 90$ м. Значит, его скорость равна 5 м/с, и оставшиеся 100 м он пробежит за 20 секунд.

10.2. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a любой из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученное уравнение также будет иметь корень.

Решение. Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 – корни данного уравнения, то $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид $x^2 - (2t_1 + t_2)x + 2t_1t_2 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = 4t_1^2 - 4t_1t_2 + t_2^2 = (2t_1 - t_2)^2 \geq 0$. Значит, у этого уравнения есть корень.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что полученное уравнение имеет корень t_2 (или $2t_1$).

10.3. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел – иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ. Три.

Решение. Предположим, что на доске написано не меньше четырёх чисел. Обозначим любые четыре из них через a, b, c, d. Тогда числа $a+b+c$ и $a+b+d$ будут рациональными. Значит, и их разность, равная $(b+c+d)-(a+b+c)=d-a$ также будет рациональным числом. Аналогично можно показать, что $b-a$ и $c-a$ будут рациональными. Таким образом, $b=a+r_1$, $c=a+r_2$, $d=a+r_3$, где r_1, r_2, r_3 – рациональные числа. Но, поскольку число $a+b+c=3a+r_1+r_2$ рационально, число a также рационально. Значит, и число $a+b=2a+r_1$ рационально, что противоречит условию. Итак, на доске не более трёх чисел.

Осталось заметить, что на доске могли быть написаны три числа, удовлетворяющие условию, например, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$.

10.4. В четырёхугольнике $ABCD$, в котором $BA=BC$ и $DA=DC$, продолжения сторон BA и CD пересекаются в точке N, а продолжения сторон BC и AD – в точке M. Известно, что разность длин двух сторон четырёхугольника $ABCD$ равна радиусу вписанной в этот четырёхугольник окружности. Найдите отношение длин отрезков BD и MN.

Ответ. $BD:MN=1:2$.

Решение. Пусть O – центр окружности ω, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, а r – ее радиус (см. рис. 11). Можно считать, что $AD-AB=r$.

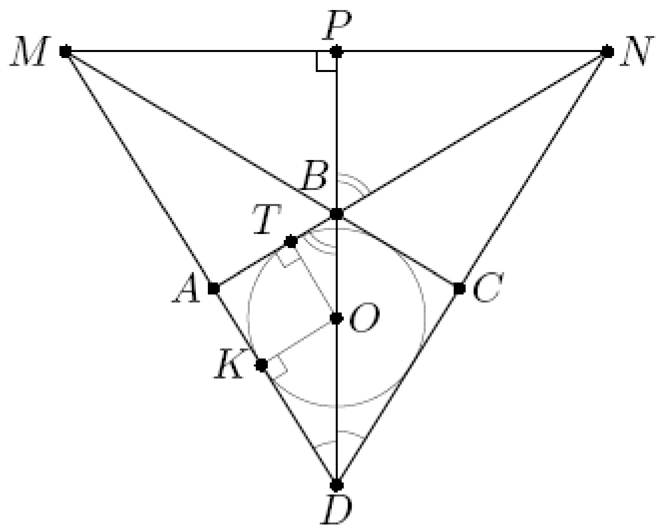

Рис. 11

Заметим, что полученная фигура симметрична относительно прямой BD.

Продолжим DB до пересечения с MN, пусть P – точка пересечения. Пусть K и T – соответственно точки касания сторон AD и AB с окружностью ω. Тогда $AK=AT$, поэтому $r=AD-AB=DK-BT$. Из подобия прямоугольных треугольников DKO и DPM

следует, что $DK:DP = KO:MP$, откуда $DK = r\cdot\frac{DP}{MP}$. Далее, из подобия прямоугольных треугольников OTB и NPB следует, что $BT:BP = OT:PN$, откуда $BT = r\cdot\frac{BP}{PN}$. Но $PN = PM$ из симметрии; поэтому $DK - BT = r\cdot\frac{DP-BP}{MP} = r\cdot\frac{DB}{MP}$. Левая часть этого равенства равна r, поэтому $DB = MP$. Значит, искомое отношение равно $DB:(2MP) = 1:2$.

10.5. Имеется таблица 11×11. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый за ход ставит один крестик, а второй – один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A – количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B – количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает первый.

Решение. Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.

Приведем выигрышную стратегию для первого игрока. Сначала ему нужно поставить крестик в центральную клетку таблицы. Каждым следующим ходом ему следует ставить крестик в клетку, симметричную относительно центра таблицы клетке, в которую только что поставил нолик второй игрок (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет больше количества столбцов, в которых больше ноликов.

Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. В центральной клетке (центре таблицы) стоит крестик. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Значит, всего в этой строке стоят 6 крестиков и 5 ноликов, поэтому в центральной строке крестиков больше, чем ноликов. Аналогично, в центральном столбце крестиков больше, чем ноликов.

Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, в этих парах количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = 6$, $B = 5$, и первый выиграет.

Одиннадцатый класс

11.1. Решите уравнение $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} = 3^{-x} + 4^{-y}$.

Ответ. $x = y = 0$.

Решение. По ОДЗ имеем $xy \geq 0$ и $x + y \geq 0$. Если, скажем, $x < 0$, то из первого неравенства получаем $y \leq 0$, а значит, $x + y < 0$, что не так. Значит, $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Но тогда $2^{\sqrt{xy}} + 5^{\sqrt{x+y}} \geq 2^0 + 5^0 = 2$ и $3^{-x} + 4^{-y} \leq 3^0 + 4^0 = 2$; при этом равенства достигаются только при $x = y = 0$. Значит, и требуемое равенство возможно лишь при $x = y = 0$.

11.2. Все натуральные числа от 2 до 101 разбили на две группы по 50 чисел в каждой. Числа в каждой группе перемножили, и два полученных произведения сложили. Докажите, что эта сумма – составное число.

Решение. Среди 100 подряд идущих чисел ровно 50 являются чётными. Поэтому, если при разбиении на группы не все 50 чётных чисел попадут в одну группу, то в каждой из групп произведение будет делиться на 2, а значит, и сумма произведений будет делиться на 2. Если же в одной группе окажутся все чётные числа, а в другой – все нечётные, то их произведения будут делиться на 3, так как в одной группе окажется число 6, а в другой – 3. В этом случае рассматриваемая сумма произведений будет делиться на 3. В обоих случаях мы указали делитель полученной суммы, больший единицы, но меньший, чем сама сумма. Значит, эта сумма – составное число.

11.3. Приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет корни t_1 и t_2, причём $-1 < t_2 < 0$. Докажите, что если прибавить к коэффициентам a и b корень t_2, то полученное уравнение также будет иметь два различных корня.

Решение. Согласно теореме Виета имеем $a = -t_1 - t_2$, $b = t_1 t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид $x^2 - t_1 x + t_1 t_2 + t_2 = 0$. Его дискриминант равен $D = t_1^2 - 4t_1 t_2 - 4t_2$, то есть $D = (t_1 - 2t_2)^2 - 4((t_2)^2 + t_2)$. Утверждение задачи теперь следует из того, что при $t_2 \in (-1;0)$ сумма $t_2^2 + t_2 = t_2(t_2 + 1)$ отрицательна (и, значит, $D > 0$).

11.4. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведены четыре высоты – перпендикуляры из вершин на противоположные грани. Назовем высоту пирамиды *длинной*, если она не короче каждой из трёх высот треугольника, являющегося гранью, к которой эта высота проведена (например, высота из вершины B – длинная, если она не короче каждой из высот треугольника ACD). Какое наибольшее количество длинных высот может иметь пирамида $ABCD$?

Ответ. Три.

Решение. Докажем вначале, что все четыре высоты пирамиды не могут быть длинными. Предположим противное. Пусть AH и DP – высоты пирамиды $ABCD$, а AM, DN – высоты треугольников ABC и DBC соответственно (см. рис. 12). По условию имеем $AH \geq DN$ и $DP \geq AM$. Но перпендикуляр AH не длиннее наклонной AM к той же плоскости BCD; аналогично $DP \leq DN$. Итак, получаем $AM \geq AH \geq DN \geq DP \geq AM$. Значит, все эти неравенства должны обратиться в равенства, что возможно только если отрезки AH и AM совпадают. Тогда плоскость CAB содержит перпендикуляр AM к плоскости BCD, то есть $CAB \perp BCD$. Аналогично, $DAC \perp BCD$. Значит, и линия пересечения плоскостей DAC и CAB – прямая AC – перпендикулярна плоскости BCD. Аналогично, $BA \perp BCD$; но тогда $AC \parallel AB$, что невозможно. Значит, длинных высот не больше трёх.

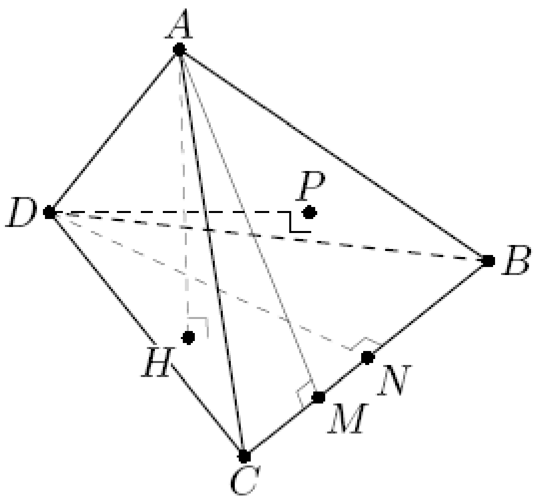

Рис. 12

Решение. Осталось показать, что существует пирамида $ABCD$, имеющая ровно три длинных высоты. Это пирамида, плоские углы при вершине D которой – прямые, а длины ребер, выходящих из этой вершины, одинаковы и равны a (см. рис. 13). У такой пирамиды высоты из вершин A, B, C имеют длину a, а длины высот треугольников граней, к которым эти высоты проведены, равны a или $a/\sqrt{2}$.

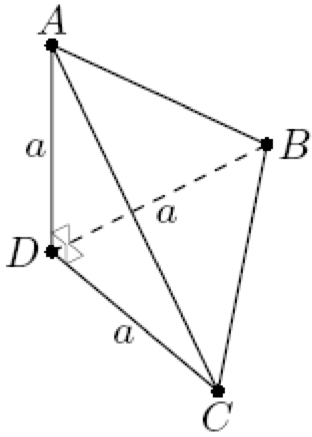

Рис.13

11.5. Имеется 2013 карточек, на каждой из которых с одной стороны написано число от 1 до 2013 (на всех карточках числа разные). Их положили по кругу чистой стороной вверх. Вася переворачивает одну карточку. После этого, если на карточке написано число N, то он отсчитывает N-ую карточку по часовой стрелке и переворачивает ее. Таким образом он продолжает переворачивать карточки (одна карточка может быть перевёрнута несколько раз). Может ли так оказаться, что в некоторый момент все карточки будут лежать числами вверх?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что Вася сможет перевернуть все карточки числами вверх. Пусть в некоторый момент до этого Васе пришлось перевернуть какую-то карточку во второй раз; тогда после этого он будет переворачивать только те карточки, которые он уже переворачивал до этого. Значит, если перед этим ходом не все карточки были перевёрнуты, то все карточки не будут перевёрнуты никогда. Итак, в некоторый момент каждая карточка будет перевёрнута ровно один раз. Рассмотрим этот момент.

Если Вася открыл карточку с числом 2013, то следующая карточка будет 2013-й по часовой стрелке, то есть это будет та же карточка. Второй раз её переворачивать мы не должны; значит, для того, чтобы перевернуть все карточки, карточка с числом 2013 должна быть перевёрнута последней. Следовательно, до этого должны быть открыты (в некотором порядке) все карточки с числами от 1 до 2012.

Пусть Вася первой открыл карточку с числом k. Посчитаем, какой по отношению к этой карточке будет карточка с числом 2013. Через 2012 «ходов» Вася должен ее открыть. При этом он должен отсчитывать от карточки с числом k по часовой стрелке ровно

$1+2+\ldots+2012$ карточек. Но $1+2+\ldots+2012=\frac{2013\cdot 2012}{2}=2013\cdot 1006$. То есть после переворачивания 2012 карточек он опять попадет в карточку с числом k и не сможет перевернуть карточку с числом 2013. Противоречие.